Lösungen zur Übung zum Mathematischen Vorkurs

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1 Gegeben seien die Basen $\mathbb{B}_1$ und $\mathbb{B}_2$, sowie zwei Vektoren $\vec{v_1}$ der Basis 1 und $\vec{v_2}$ der Basis 2. Wandeln Sie $\vec{v_1}$ in Basis 2 und $\vec{v_2}$ in Basis 1 um.

$\mathbb{B}_1 = \{\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$, $\mathbb{B}_2 = \{\vec{e_u}, \vec{e_v}, \vec{e_w}\}$ mit $\vec{e_u} = 3\vec{e_x}$; $\vec{e_v} = \frac{1}{2}\vec{e_z}$ und $\vec{e_w} = 2\vec{e_y}$. Weiterhin sei

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{xyz} = 3\vec{e_x} + \vec{e_y} + 2\vec{e_z} = \vec{e_u} + \tfrac{1}{2}\vec{e_w} + 4\vec{e_v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{uvw}$$

$$\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}_{xyz} = 2\vec{e_u} + 2\vec{e_v} + 2\vec{e_w} = 6\vec{e_x} + \vec{e_z} + 4\vec{e_y} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{uvw}$$

Aufgabe 5.2 Falls möglich, berechnen Sie folgende Ausdrücke. Falls nicht, geben Sie eine Begründung an.

a) $\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $5 \cdot \begin{bmatrix} 1,2 \\ 1,6 \\ 2,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ Geht nicht, da die beiden Vektoren unterschiedlich viele Dimensionen haben und aus unterschiedlichen Vektorräumen stammen.

e) $\begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -2 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$

g) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix} = -10$

h) $\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 15 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 228 \\ 35 \\ -159 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 40 \\ -70 \end{bmatrix}$

j) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Geht nicht, da das Kreuzprodukt nur für Vektoren der Dimension 3 definiert ist.

k) $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ Geht nicht, da das Kreuzprodukt nur für Vektoren definiert ist.

l) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 0$

Aufgabe 5.3 Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der angegebenen Vektorfelder:

a) $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = 1 + 1 + 1 = 3; \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{bmatrix} yz^2 \\ 0 \\ z\sin(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{\nabla}\vec{v} = \sin(x); \quad \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2yz - z \cdot \cos(x) \\ -z^2 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie, dass $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = 0$ ist für jedes beliebige Vektorfeld $\vec{v}$.

Sei $\vec{v} = \begin{bmatrix} a(x;\ y;\ z) \\ b(x;\ y;\ z) \\ c(x;\ y;\ z) \end{bmatrix}$. So gilt:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}) = \vec{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dc}{dy} - \frac{db}{dz} \\ \frac{da}{dz} - \frac{dc}{dx} \\ \frac{db}{dx} - \frac{da}{dy} \end{bmatrix} = \frac{d^2c}{dxdy} + \frac{d^2a}{dydz} + \frac{d^2b}{dzdx} - \frac{d^2b}{dxdz} - \frac{d^2c}{dxdy} - \frac{d^2a}{dxdz} = 0$$