Lösungsblatt 12
zur Experimentalphysik I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2014 - Übungsblatt 12

Aufgabe 12.1 Erde und Sonne 1 (Präsenzaufgabe)

Welche hypothetische Strecke s würde die Erde in der ersten Minute zurücklegen, wenn sie plötzlich angehalten und der Anziehungskraft der Sonne folgen würde?
Die Masse der Sonne ist $m_S = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg und der Abstand zwischen Erd- und Sonnenmittelpunkt beträgt $r_{SE} = 149{,}5 \cdot 10^6$ km.
Berechnen Sie die Strecke s über

a) Die Gravitationskraft

b) Die Zentripetalkraft

Lösung:
Die Erde bewegt sich in diesem Beispiel beschleunigt auf die Sonne zu. Für die zurückgelegte Strecke gilt
$s = \frac{1}{2}at^2$.
Die Beschleunigung a soll nun auf zwei Weisen bestimmt werden.

a) Die Gravitationskraft zwischen Erde und Sonne ist
$F_G = m_E a = G\frac{m_S m_E}{r_{SE}^2}$.
Also gilt
$a = G\frac{m_S}{r_{SE}^2} = 0{,}0059\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

b) Die Zentripetalbeschleunigung der Erde ist
$a = r\omega^2$.
Mit $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{360\ \mathrm{d}}$
ist
$a = 0{,}0059\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.
Das entspricht dem Ergebnis aus a). Wir haben also alles richtig gemacht ;)

Die nach einer Minute zurückgelegte Weglänge beträgt also
$s = \frac{1}{2}at^2 = 10{,}6$ m.

Aufgabe 12.2 Kugel auf Drehscheibe (Präsenzaufgabe)

Eine horizontal gelagerte Kreisscheibe rotiert im Uhrzeigersinn mit einer Drehzahl von $f = 0{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}}$. Auf ihr rollt eine Kugel der Masse $m = 0{,}1$ kg mit der Geschwindigkeit $v = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach außen. Wie groß ist die Corioliskraft?

Lösung:
Für die Corioliskraft gilt
$\vec{F}_C = 2m\left(\vec{v} \times \vec{\omega}\right)$
beziehungsweise
$F_C = 2mv\omega \sin\alpha$,
wobei α der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ ist, der hier 90° beträgt.
Demnach ist
$F_C = 2mv\omega = 4mv\pi f = 3{,}14$ N.

Name, Vorname: ______________________ Matrikelnummer:

Aufgabe 12.3 Explorer 1 (Präsenzaufgabe)

Berechnen Sie die Umlaufzeit des ersten künstlichen Erdtrabanten der USA (Explorer 1). Die Höhe des Satelliten über der Erdoberfläche ist $h = 900$ km. Weiterhin sind folgende Größen gegeben:
Erdradius $r_E = 6378$ km, Distanz Erd-Mondmittelpunkt $r_{EM} = 384400$ km, Umlaufzeit des Mondes $T_M = 27{,}322$ d.

Lösung:
Wir nutzen das dritte Keplersche Gesetz:
$\frac{T_{Ex}^2}{T_M^2} = \frac{a_{Ex}^3}{a_M^3}$
$T_{Ex} = T_M\sqrt{\frac{a_{Ex}^3}{a_M^3}} = 27{,}322 \cdot 24\ h\sqrt{\frac{(6378+900)^3}{384400^3}}$ =1,708 h=1 h 42 min.

Aufgabe 12.4 Raumstation (2 Punkte)

Eine ringförmige Raumstation rotiere um ihre Symmetrieachse, um so den Bewohnern die fehlende Schwerkraft zu ersetzen.

a) Die Raumstation habe den Radius $r = 400$ m. Mit welcher Frequenz muss die Raumstation rotieren, damit für die Bewohner der Eindruck normaler Erdanziehung entsteht?

b) Die Raumstation wurde aus der Ruhe heraus mit einen Drehmoment von $8 \cdot 10^6$ Nm in Rotation versetzt. Nach 15,5 Tagen hatte sie die in a) berechnete Frequenz. Wie groß ist das Trägheitsmoment der Raumstation bezüglich ihrer Symmetrieachse?

c) Wie schwer ist die Raumstation, wenn man annimmt, dass ihre Symmetrie hinreichend gut als dünnwandiger Hohlzylinder beschrieben werden kann?

Lösung:

a) Die Zentripetalbeschleunigung ist
$a = \omega^2 r$.
Es soll $a = g$ gelten.
Aus $\omega = 2\pi f$ folgt
$g = 4\pi^2 f^2 r$
und somit
$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{r}} = 0,025\ \frac{1}{\mathrm{s}}$.

b) Für das Trägheitsmoment gilt
$\tau = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.
Mit $\Delta\omega = 2\pi f$ und Δt =1339200 s gilt für das Trägheitsmoment
$I = \tau\frac{\Delta t}{2\pi f} = 6{,}8 \cdot 10^{13}$ kgm^2

c) Es gilt
$I = mr^2$
und somit
$m = \frac{I}{r^2} = 425000$ t.

Aufgabe 12.5 Turm (3 Punkte)

Eine Bleikugel wird vertikal von einem 110 m hohen Turm in Florenz (geografische Breite: 44°) fallen gelassen. Wie weit liegt der Auftreffpunkt vom Turm entfernt?

Lösung:
Die Erde dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit
$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{86400\ \mathrm{s}}$.
Demnach ist die Coriolisbeschleunigung durch
$a = 2\omega v \cos(\Theta)$
gegeben.
Die Geschwindigkeit des freien Falls der Kugel ist
$v = gt$
und somit gilt
$a = 2\omega g \cos(\Theta) t$.
Um aus der Coriolisbeschleunigung einen zeitabhängigen Ausdruck für die Verschiebung x zu erhalten, muss der Ausdruck für a zwei mal integriert werden:
$\frac{dv_x}{dt} = a = 2\omega g \cos(\Theta) t$
$\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t 2\omega g \cos(\Theta)\ dt$
$v_x = \omega g \cos(\Theta) t^2$
$\frac{dx}{dt} = v_x = \omega g \cos(\Theta) t^2$
$\int_0^x dx = \int_0^t \omega g \cos(\Theta) t^2\ dt$
$x = \frac{1}{3}\omega g \cos(\Theta) t^3$.
Für die Fallbewegung der Kugel gilt
$h = \frac{1}{2} g t^2$.
Sie benötigt also die Zeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ um den Boden zu erreichen. Einsetzen von t in den Ausdruck für x ergibt
$x = \frac{1}{3}\omega g \cos(\Theta) \sqrt{\frac{8h^3}{g^3}} = \frac{1}{3}\omega \cos(\Theta) \sqrt{\frac{8h^3}{g}} = 0{,}018\ \mathrm{m}$.

Aufgabe 12.6 Gravitation (3 Punkte)

An den Punkten $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ m, $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ m und $\vec{r_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ m befinden sich Kugeln mit den Massen $m_1 = 5$ kg, $m_2 = 10$ kg und $m_3 = 8$ kg. Welche Gravitationskraft wirkt auf m_1?

Lösung:
Es gilt
$\vec{F} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}$
mit
$\vec{F}_{ij} = G\frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}\vec{e}_{ij}$,
wobei r_{ij} der Abstand der Massen m_i und m_j ist und $\vec{e}_{ij} = \frac{\vec{r}_{ij}}{r_{ij}}$ der Einheitsvektor der Richtung $\vec{r}_{ij}$ ist.
Es ist
$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
$|\vec{r}_{21}| = 5$ m
$\vec{e}_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
und
$\vec{r}_{31} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
$|\vec{r}_{31}| = 5$ m
$\vec{e}_{31} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Somit ist
$\vec{F}_{21} = G\frac{50\mathrm{kg}^2}{25\mathrm{m}^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{F}_{31} = G\frac{8\mathrm{kg}^2}{25\mathrm{m}^2}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

und
$\vec{F} = \frac{G}{25}\left(\left(\begin{array}{c} 50 \\ 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} -24 \\ -32 \end{array}\right)\right) \frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{2G}{25}\left(\begin{array}{c} 13 \\ -16 \end{array}\right) \frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^2}$
und
$F = \frac{2G}{25}\sqrt{13^2 + 16^2}\ \mathrm{N} = 1{,}1 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{N}$.

Aufgabe 12.7 Erde und Mond (2 Punkte)

Die Masse des Mondes ist etwa 81 mal kleiner als die der Erde. Sein Durchmesser beträgt etwa 0,273 Erddurchmesser. Welche Gewichtskraft übt ein Massestück mit $m = 1$ kg auf die Mondoberfläche aus?

Lösung:
Es gilt
$F = G\frac{m_M m}{r_M^2}$.
Mit $m_M = \frac{m_E}{81}$ und $r_M = 0,273 m_E$ folgt
$F = \frac{m}{81(0{,}273)^2} G\frac{m_E}{r_E^2}$.
Da $G\frac{m_E}{r_E^2} = g$ gilt, ist das Ergebnis
$F = \frac{mg}{81(0{,}273)^2} = 1{,}63$ N.

Aufgabe 12.8 Erde und Sonne (2 Punkte)

Wie lang wäre ein Jahr, wenn die Sonne die vierfache Masse hätte?

Lösung:
Es gilt
$F_G = F_Z$
$G\frac{m_E m_S}{r_{SE}^2} = \frac{m_E v^2}{r_{SE}}$
und
$v = \frac{2\pi r_{SE}}{T_S}$.
Demnach gilt für die Umlaufzeit
$T_S = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_{SE}^3}{G m_S}}$
Bei vierfacher Sonnenmasse halbiert sich also die Umlaufzeit.